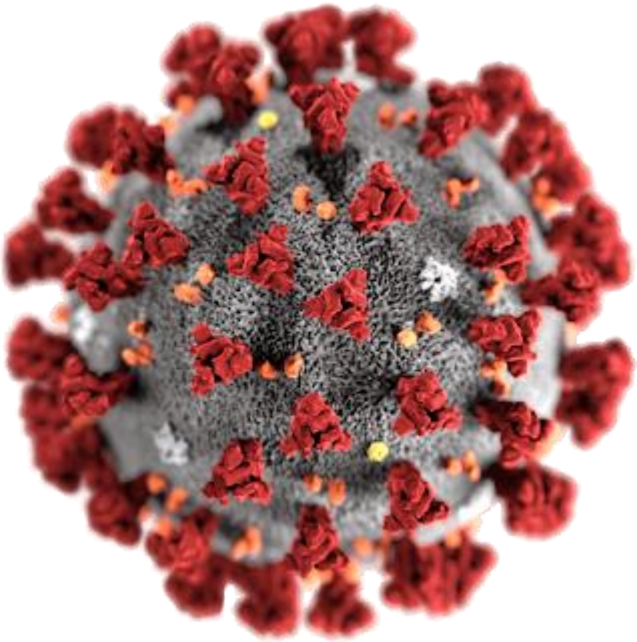
Paolo Alessandrini

Matematica e COVID-19

Una collezione di post ad argomento matematico apparsi sul blog “Mr. Palomar” (misterpalomar.blogspot.com) durante la pandemia da COVID-19.

La matematica delle epidemie (parte prima)

(26 febbraio)



Un'immagine del virus SARS-CoV-2, responsabile del COVID-19

In questi giorni non si parla d'altro.
L'emergenza Coronavirus (COVID-19) ha rapidamente attirato l'attenzione di tutti: sui social e sugli altri media si discute quasi unicamente dell'epidemia e le nostre vite quotidiane sono state fortemente influenzate dalle misure preventive messe in atto dalle autorità.
Anche se non siamo stati tutti direttamente contagiati dal virus, tutti ne parliamo di continuo, tutti ci documentiamo sulle notizie degli ultimi contagi e tutti siamo, almeno in parte, preoccupati dall'evoluzione futura dell'epidemia. Insomma, oltre al virus vero e proprio, ne esiste un secondo, parallelo e "virtuale", legato alla rapida e capillare diffusione delle notizie e alla conseguente apprensione.

Questo fatto ci riporta a una interessante analogia: la dinamica della trasmissione di un virus nella popolazione durante un'epidemia è spesso molto simile a quella che governa la diffusione di un contenuto molto popolare sulla rete, per esempio un meme, un tweet, un video su Youtube, un post su Instagram o su Facebook, e così via. E non è un caso se a questo tipo di contenuti di successo si associa un aggettivo come "virale", che ha origine proprio nel contesto epidemiologico.
Diventa allora interessante comprendere quali siano i meccanismi comuni che regolano questi due ordini di fenomeni: e in questo compito la matematica appare come strumento fondamentale.
Gli studiosi hanno infatti sviluppato alcuni modelli matematici utili per descrivere e prevedere l'andamento della diffusione di alcune epidemie.
Come vengono creati questi modelli? Soprattutto attraverso un'analisi statistica: elaborando dati raccolti

su larga scala e relativi all'evoluzione di un contagio, si formulano ipotesi sui meccanismi sottostanti, che poi vengono confermati, perfezionati o modificati da successive osservazioni. In particolare, un buon modello deve saper riprodurre con buona approssimazione la sequenza temporale dei casi di malattia in una comunità di individui.

Daniel Bernoulli

Uno dei primi a tentare un'impresa del genere fu il matematico francese Daniel Bernoulli (1700-1782), che si cimentò nella descrizione quantitativa della diffusione del vaiolo. Verso la metà del Settecento, questa malattia rappresentava un'emergenza straordinariamente grave: era la più grave malattia endemica in quasi tutto il mondo, in Europa era la prima causa di morte, con 400.000 decessi all'anno, e in Francia aveva mietuto numerose vittime anche nella famiglia reale di Luigi XIV (il Re Sole).
Nel suo trattato "Nuova analisi della mortalità causata dal vaiolo e studio dei vantaggi connessi alla vaccinazione preventiva" (1760), Bernoulli propose un modello matematico fondato sulla crescita esponenziale del numero di contagiati, e sulla base di esso dimostrò che l'arma della vaccinazione sarebbe stata molto vantaggiosa per combattere la malattia.
Lo studio di Bernoulli fu molto lungimirante, essendo stato pubblicato quasi quarant'anni prima dell'introduzione del vaccino di Edward Jenner contro il vaiolo.

Attualmente il paradigma di riferimento per la descrizione matematica delle epidemie è il modello proposto nel 1927 dagli scienziati scozzesi William O. Kermack (1898-1970) e Anderson G. McKendrick (1876-1943).
Nel loro articolo "A contribution to the mathematical theory of epidemics", i due ricercatori osservarono che per comprendere la dinamica di un contagio è conveniente suddividere la popolazione in tre classi epidemiologiche:
1. gli individui suscettibili ("susceptible", indicati quindi con S), che non sono stati ancora contagiati ma potrebbero diventarlo;
2. gli individui infettivi ("infectious", I), che sono stati infettati e sono contagiosi;
3. gli individui guariti ("recovered", R), che sono stati infettati ma non sono più contagiosi perché sono guariti (oppure sono morti, o sono stati isolati).

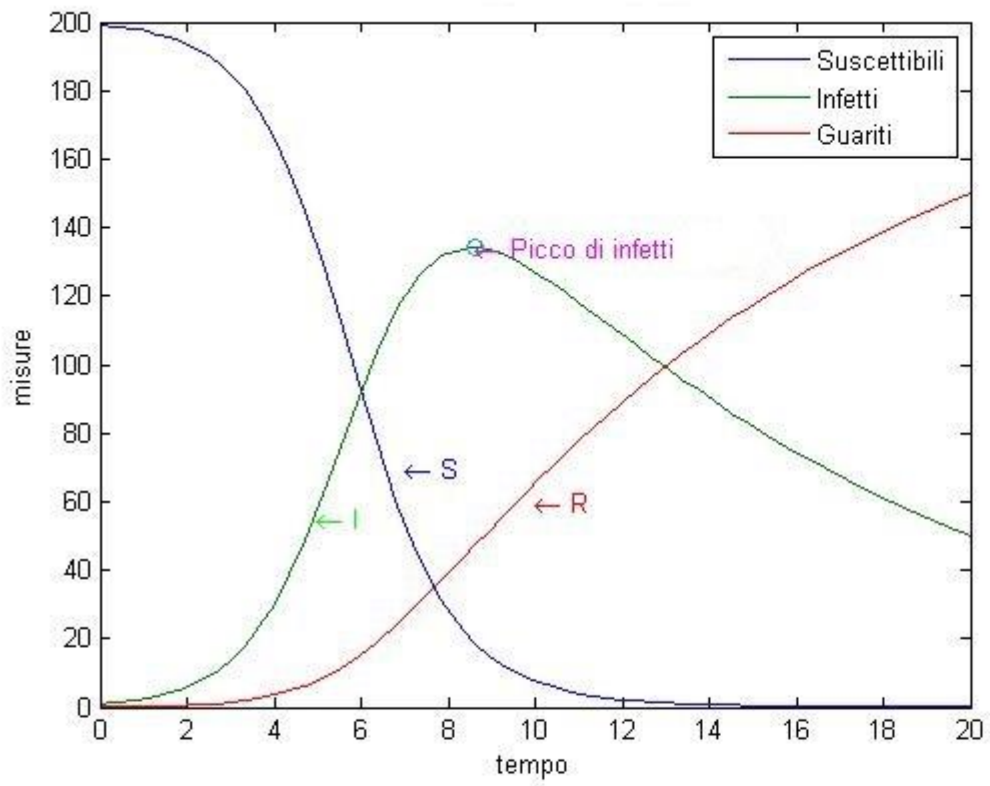
W. Kermack e A.McKendrick

Kermack e McKendrick si accorsero che, nella maggior parte delle epidemie, una persona poteva passare soltanto dalla classe 1 alla classe 2 oppure dalla classe 2 alla classe 3, non essendo possibile un ritorno dalla classe 3 alla classe 2 (ipotizzando che chi è guarito dalla malattia si sia immunizzato).
Il modello specifico pubblicato dai due scienziati si basava su un sistema di equazioni differenziali che permettevano di prevedere l'andamento nel tempo della numerosità delle tre classi epidemiologiche sopra descritte: S(t), I(t) e R(t).
Non è casuale che il modello di Kermack e McKendrick sia arrivato poco dopo quello, molto famoso, proposto da Alfred Lotka e Vito Volterra, che descriveva, sempre attraverso un sistema di equazioni differenziali, la dinamica di un ecosistema in cui interagiscono due specie animali: un predatore e la sua preda.

Più in generale, un modello matematico di epidemia che, ispirandosi all'idea di Kermack e McKendrick, si basa sulle tre classi epidemiologiche S, I e R, viene detto modello SIR. Naturalmente esistono anche tipologie diverse di modelli: per esempio, se la malattia non prevede l'immunizzazione dopo la guarigione (come accade con il raffreddore), la classe R non ha motivo di esistere, e si parla allora di modelli SI.
Il principale obiettivo di un modello SIR è quello di prevedere l'evoluzione di un'epidemia e stimare la porzione di popolazione che contrarrà la malattia. I modelli SIR sono applicabili se sussistono alcune ipotesi:
a) durante l'epidemia la popolazione non si riproduce, cioè non vi sono nuove nascite;
b) durante l'epidemia la causa principale di morte è la malattia epidemica stessa;
c) la popolazione è isolata, cioè non vi sono entrate o uscite rispetto all'esterno;
d) la malattia non ha un periodo di incubazione;
e) dopo la guarigione si acquisisce immediatamente l'immunità;
f) tutti gli individui infetti sono ugualmente contagiosi, indipendentemente dal tempo trascorso dal contagio.

Come è facile intuire, queste ipotesi sono molto semplificative rispetto alla realtà. Per esempio, nel caso del COVID-19 il periodo di incubazione esiste e dura circa 14 giorni, l'immunità dei guariti non è accertata e ovviamente almeno le ipotesi a) e b) non sono realistiche. D'altra parte, nella formulazione di un modello è normale partire da una descrizione che si concentri sugli elementi fondamentali del fenomeno, trascurando quelli che vengono riconosciuti come dettagli di contorno: un po' come quando nella determinazione delle traiettoria di un proiettile si trascura l'attrito con l'aria, in quanto poco rilevante ai fini del calcolo.
Sulla base delle suddette ipotesi, la dinamica di un modello SIR è abbastanza semplice. All'inizio dell'epidemia, la numerosità della classe dei suscettibili, cioè degli individui non ancora contagiati, diminuirà progressivamente a causa dei contagi, mentre la classe degli infettivi si ingrosserà per la stessa ragione. Al crescere degli infettivi, maggiore sarà la probabilità di un suscettibile di essere contagiato, e quindi l'aumento degli infettivi tenderà inizialmente ad accelerare (non a caso Bernoulli, pur partendo da ipotesi molto diverse, aveva pensato a un andamento esponenziale).
A un certo punto, però, alcuni individui cominceranno a passare dalla classe degli infettivi a quella dei

"recovered", perché nel frattempo sono guariti, oppure deceduti, oppure messi in isolamento. Da questo momento in avanti tutto si giocherà sul saldo tra i due passaggi: finché vi saranno più contagi che rimozioni (guarigioni più decessi più isolamenti) l'epidemia resterà nella sua fase ascendente, ma quando cominceranno a prevalere le rimozioni si entrerà nella fase discendente. Un fatto è certo: il numero dei suscettibili è sempre decrescente e il numero dei rimossi è sempre crescente.



Tipico andamento di una epidemia secondo lo schema SIR

Quello sopra è un grafico che mostra un possibile andamento di un'epidemia secondo l'approccio SIR: si nota subito la fase ascendente degli infettivi, che culmina in un picco massimo e che è seguita da una fase discendente; parallelamente, i suscettibili diminuiscono sempre e i guariti aumentano sempre.

Ora, torniamo per un attimo all'analogia con la diffusione di contenuti virali nella rete: si può comprendere subito come l'idea di Kermack e McKendrick sia applicabile anche a questo contesto. Immaginiamo che oggi qualcuno pubblichi in rete un meme potenzialmente destinato a diventare un fenomeno di internet.

"The dress"

Al momento della pubblicazione, rispetto alla potenzialità "viralità" del meme, tutta la popolazione mondiale appartiene alla classe dei suscettibili, perché nessuno ha ancora visto il meme ma potrebbe farlo in futuro. Man mano che le persone scoprono il meme e la condividono a loro volta, questi passano dalla classe dei suscettibili a quella degli infettivi: diventano infatti "vittime" del contenuto virale, cioè se ne appassionano e sono attive nel diffonderlo verso altre persone. Col passare del tempo, sempre più persone cesseranno di interessarsi al contenuto e smetteranno di diffonderlo, passando così nella classe dei "guariti".

Nel 2015 venne postata sulla piattaforma di microblogging Tumblr l'immagine di un vestito che divenne subito virale a causa di un'illusione ottica che suscitava nel pubblico la domanda: "il vestito è bianco e oro, oppure blu e nero?"

La viralità del fenomeno "The dress"

L'immagine diventò rapidamente virale: nel giro di sole 48 ore il post ottenne 400.000 interazioni; nei giorni immediatamente successivi, molti milioni di persone videro l'immagine e la condivisero attraverso i principali social network.

Il grafico a sinistra mostra, in modo semplificato, come il fenomeno denominato "The Dress" si manifestò nella sua viralità: anche in questo caso si distinguono i tre gruppi S (le persone che non hanno ancora visto l'immagine), I (le persone che l'hanno vista, se ne sono appassionati e la stanno condividendo) e R (le persone che si sono disinteressati definitivamente del vestito).

Le domande che sorgono a questo punto sono molteplici. Quali condizioni devono verificarsi affinché un'infezione possa essere definita epidemica e, come tale, si diffonda secondo uno schema di viralità come quello descritto dai grafici sopra riportati? Quali altri andamenti sono possibili? Quale tipo di

dinamica sta mostrando il Coronavirus che sta seminando il panico in questi giorni?
Tutto dipende da alcuni parametri fondamentali, che caratterizzano l'infezione: nella prossima parte di questo post vedremo quali sono e scopriremo quali sono le possibili dinamiche di un modello SIR. Restate in contatto!

La matematica delle epidemie (parte seconda)

(28 febbraio)

Nicolas Poussin, "La peste di Azoth" (1631), Louvre.

Nella prima parte di questo post abbiamo fatto la conoscenza dei modelli SIR per lo studio delle epidemie. L'idea di fondo è molto semplice: la popolazione viene suddivisa tra suscettibili (S), cioè individui sani che potrebbero contrarre la malattia, infettivi (I) che si sono ammalati e sono quindi veicolo della malattia, e "recovered" (R), cioè individui che sono "usciti di scena" perché guariti oppure deceduti o ancora messi in isolamento.
I due scienziati Kermack-McKendrick scoprirono che, sotto alcune ipotesi semplificative, gli individui possono passare soltanto dalla classe S alla classe I oppure dalla classe I alla classe R.
La sfida è capire come avvengano questi passaggi, cioè come possano variare nel tempo le numerosità delle tre classi epidemiologiche: in altre parole descrivere l'andamento delle funzioni *S(t)*, *I(t)* ed *R(t)*. Per riuscire nell'intento, dobbiamo pagare un piccolo prezzo: introdurre un po' di matematica nella nostra discussione.
Ma non temete: se mi seguite con un pizzico di pazienza arriverete sani e salvi alla fine. Con qualche utile nozione in più, almeno spero (intendiamoci, io non sono un epidemiologo o un virologo e nemmeno un medico, ma semplicemente un insegnante e un divulgatore matematico: l'obiettivo di questo post non è sostenere una o l'altra tesi in un campo nel quale non ho alcuna voce in capitolo, ma mostrare come anche in questo ambito è stata usata la matematica per formalizzare alcuni concetti).

Innanzitutto dobbiamo analizzare meglio i meccanismi alla base dei passaggi di classe che ho citato prima. Per esempio, cosa significa che un individuo passa da S a I? Be', semplice: il malcapitato si è infettato ed è diventato contagioso. Perché ciò avvenga, serve un incontro tra un infettivo e un suscettibile: il primo, essendo contagioso, trasmette la malattia al secondo.
La domanda che assilla ciascuno di noi in questi giorni di preoccupazione per il COVID-19 è: quanto è probabile che io contragga il virus? Il calcolo combinatorio e la teoria della probabilità possono darci una mano in questa stima. Supponiamo che *N* sia il numero totale di individui della popolazione: questo numero è costante perché, come abbiamo visto, Kermack e McKendrick trascurano le nascite e i morti per cause diverse dall'epidemia.
È facile dimostrare che, in una popolazione di N persone, il numero di incontri possibili tra due soggetti è pari a

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

Per esempio, se ci fossero in tutto N=5 individui (chiamiamoli Alberto, Beatrice, Carlo, Daniele ed Elena), il numero totale di possibili incontri sarebbe

$$\frac{5(5-1)}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

(precisamente: Alberto-Beatrice, Alberto-Carlo, Alberto-Daniele, Alberto-Elena, Beatrice-Carlo, Beatrice-Daniele, Beatrice-Elena, Carlo-Daniele, Carlo-Elena e Daniele-Elena).

Ma quanti di questi possibili incontri è a rischio? Basta che si tratti di un contatto tra un suscettibile e un infettivo: in questo caso è possibile (non certo) che il suscettibile venga contagiato. Il numero di incontri di questo tipo è dato dal prodotto tra il numero degli individui suscettibili S_0 e il numero degli infettivi I_0, ovvero da

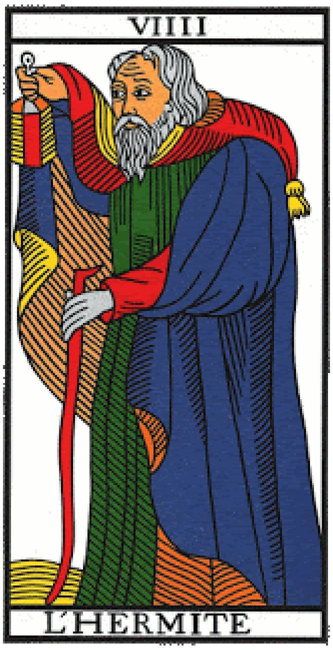
$$S_0 I_0$$

La probabilità che un incontro qualsiasi sia a rischio di contagio è quindi uguale al rapporto tra il numero di incontri pericolosi e il numero totale di incontri, cioè al rapporto

$$\frac{S_0 I_0}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{2 S_0 I_0}{N(N-1)}$$

Per esempio, se dei nostri N=5 individui, I_0=2 sono già infettivi (poniamo Beatrice e Daniele) e gli altri S_0=3 sono suscettibili, gli incontri a rischio sono S_0I_0=6 (Alberto-Beatrice, Alberto-Daniele, Beatrice-Carlo, Beatrice-Elena, Carlo-Daniele e Daniele-Elena) e la probabilità che uno di questi abbia luogo risulta essere uguale a

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{5(5-1)} = \frac{3}{5} = 60\%$$



L'eremita dei tarocchi

In questa pagina potete trovare un divertente esercizio relativo alle probabilità di contagio in un contesto immaginario di epidemia in un'isola popolata da eremiti... provate a divertirvi a calcolare le probabilità prima di leggere nella pagina i calcoli già svolti!

Se si verifica un incontro a rischio, non è detto che l'infettivo contagi il suscettibile: potrebbe accadere, certo, ma la persona ancora sana potrebbe avere fortuna e salutare l'infettivo senza aver preso il virus. Ovviamente dipende dalla contagiosità della malattia: indichiamo allora con α la probabilità che un incontro a rischio determini un contagio. Preso a caso un incontro tra due individui, la probabilità che questo risulti in una nuova infezione è uguale a

$$\alpha \frac{2S_0 I_0}{N(N-1)}$$

Ammettiamo, per semplicità, che ogni giorno, mediamente, ogni individuo ne incontri un altro: il numero medio giornaliero di nuove infezioni si ottiene allora moltiplicando l'espressione precedente per *N:*

$$\alpha \frac{2S_0 I_0}{N(N-1)} \cdot N = \frac{2\alpha}{N-1} \cdot S_0 I_0$$

Se ora definiamo

$$\beta = \frac{2\alpha}{N-1}$$

scopriamo che ogni giorno si verificano

$$\beta \cdot S_0 I_0$$

nuovi contagi: questa è anche la quantità di cui ogni giorno diminuisce il numero dei suscettibili.

Abbiamo così determinato che se *S(t)* è il numero di individui suscettibili in un certo giorno *t*, il giorno successivo tale numero sarà diventato

$$S(t+1) = S(t) - \beta S(t)I(t)$$

Ricordate? Oltre all'evento del contagio, cioè al passaggio tra suscettibile e infettivo, dobbiamo considerare anche una seconda evenienza: il passaggio da infettivo a "recovered", che può corrispondere a una guarigione, ma anche a un decesso oppure alla messa in isolamento di un individuo.
Indichiamo con γ la percentuale di infettivi che ogni giorno passano nella terza classe epidemiologica per uno qualsiasi di questi tre eventi: allora, detto *R(t)* il numero di individui "recovered" in un certo giorno t, il giorno successivo tale numero sarà cresciuto secondo la relazione

$$R(t+1) = R(t) + \gamma I(t)$$

E il numero di infettivi? Be', esso da una parte cresce in virtù dei contagi, ma dall'altra diminuisce per effetto di guarigioni, decessi e isolamenti. Il saldo totale è il seguente:

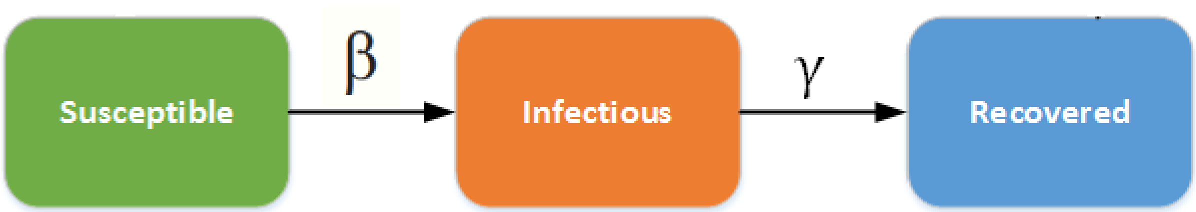
$$I(t+1) = I(t) + \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

Queste tre equazioni costituiscono il modello SIR di Kermack e McKendrick in un'ipotesi discreta (perché abbiamo descritto il tutto in uno scenario che avviene "a scatti", anzi a giorni).

Se traduciamo questo sistema in forma continua, si ottiene facilmente questo bel sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dfrac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \dfrac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \\ \dfrac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \end{cases}$$

Le strane "frazioni" poste nei primi membri di queste equazioni sono le *derivate* delle tre funzioni *S(t)*, *I(t)* e *R(t)* rispetto al tempo, cioè le misure di quanto velocemente queste quantità variano al trascorrere del tempo.
Com'è facile intuire, tutto dipende dal gioco dialettico di quei due parametri β e γ: il primo ci fornisce un indice della contagiosità dell'agente patogeno, il secondo un indice della possibilità che un malato "esca di scena" in quanto guarito, deceduto o isolato.



Le tre classi epidemiologiche del modello SIR e i parametri che regolano il passaggio da una all'altra

In particolare, la seconda equazione del sistema ci dice che la variazione del numero di infettivi

$$\frac{dI(t)}{dt}$$

è determinata da un termine "positivo" proporzionale al prodotto *S(t)I(t)* secondo la costante di proporzionalità ß e da un termine "negativo" proporzionale a *I(t)* secondo la costante di proporzionalità γ. Come si vede facilmente, questa variazione è positiva (cioè gli infettivi aumentano) se

$$\beta S(t)I(t) > \gamma I(t)$$

cioè se il rapporto γ/ß è minore del numero di suscettibili *S(t)*.
Questo rapporto ha quindi il significato di *soglia* all'inizio dell'epidemia: se il numero di individui suscettibili è maggiore di questa soglia, l'epidemia può innescarsi e tenderà, in una prima fase, a espandersi in modo molto rapido; se invece è minore, l'epidemia non riesce nemmeno a partire perché il numero degli infettivi si estingue subito.

La buona notizia è che il numero di suscettibili, come abbiamo visto, diminuisce sempre: questo ci assicura che, anche nelle epidemie più devastanti, prima o poi esso scenderà al di sotto del rapporto γ/ß, dando avvio alla fase discendente dell'epidemia. In alcuni casi, purtroppo, ciò avviene al prezzo di un elevato numero di vittime.

Concentriamoci ora sul caso "brutto", quello di vera epidemia: *S(t)* > γ/ß.
Moltiplicando entrambi i membri di questa disequazione per ß/γ si ottiene una relazione del tutto equivalente:

$$\frac{\beta}{\gamma}S(t) > 1$$

Quindi se l'inverso del rapporto di soglia moltiplicato per il numero di suscettibili è maggiore di uno, l'epidemia si innesca, altrimenti no. All'inizio dell'infezione, il numero di suscettibili è uguale a N, perché ancora nessuno si è contagiato. Se potessimo fotografare la situazione in quel momento e quantificare il numero

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} \cdot N$$

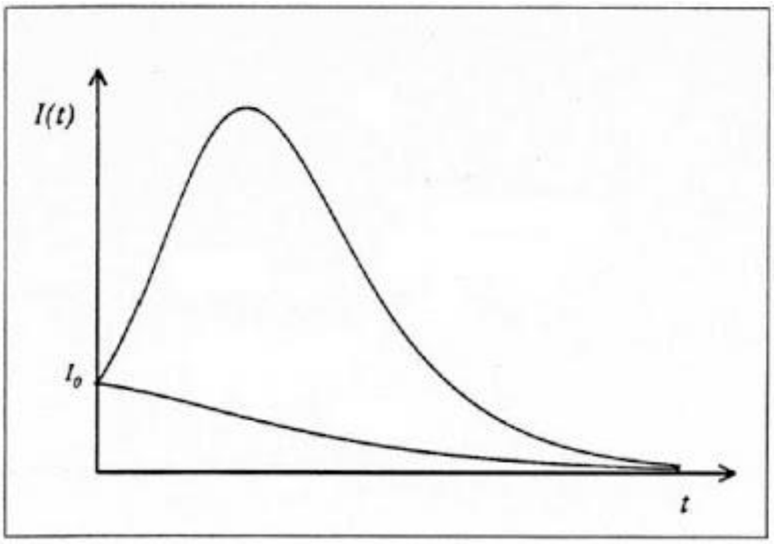
potremmo farci un'idea di come evolverà la situazione: l'epidemia si scatena solo se questo numero è maggiore di 1, altrimenti la diffusione della malattia si arresta sul nascere.

Malattia	R_0
Morbillo	12-18
Vaiolo	5-7
Poliomielite	5-7
Rosolia	5-7
Parotite	4-7
HIV/AIDS	2-5
SARS-CoV	2-5
Influenza spagnola	2-3
COVID-19	1,4-2,5 (*)
Ebola (epidemia 2014)	1,5-2,5
(*) stime OMS, 23 gennaio 2020	

Di questo numero R_0 si è parlato moltissimo in questi giorni su giornali, tv e social: è noto tra gli epidemiologi come "tasso netto di riproduzione" di un'infezione e indica il numero di persone che, in media, un singolo individuo infetto può contagiare durante il proprio periodo infettivo (nell'ipotesi che tutta la popolazione sia ancora suscettibile).

Guardate la tabella qui a fianco. Il morbillo, per esempio, un tasso netto di riproduzione altissimo, che può arrivare addirittura a 18 persone contagiate in media da un singolo malato. Altre malattie risultano meno contagiose, e per il virus che ci sta angosciando in queste settimane è stato per ora stimato un R_0 molto basso, non superiore a 2,5.

Alla luce di queste considerazioni si possono comprendere meglio le misure messe in atto dalle autorità sanitarie e dalle istituzioni per contenere l'infezione. L'obiettivo è, in ogni caso, cercare di ridurre il valore di R_0, oppure, il che è la stessa cosa, cercare abbassare $S(t)$ al di sotto del rapporto di soglia γ/β. Se si raggiunge questo risultato, l'epidemia viene sconfitta. Per farlo, si può agire in diverse direzioni:
1. abbassare il numero $S(t)$ dei suscettibili per sottrarre potenziale terreno di conquista al virus, per esempio sviluppando un vaccino ed effettuando vaccinazioni di massa (ecco perché sono così intensi gli sforzi attuali verso la ricerca di un vaccino contro il nuovo Coronavirus);
2. aumentare il rapporto di soglia γ/β, cosa che si può fare in due soli modi:
  a) alzando γ (risultato conseguibile migliorando le terapie e innalzando così la percentuale di guarigioni);
  b) abbassando β, che rappresenta la facilità del contagio (risultato conseguibile mediante una migliore educazione igienico-sanitaria e soprattutto riducendo le occasioni di incontro tra le persone - esattamente quello a cui mirano le misure adottate in questi giorni, come la chiusura delle scuole, la sospensione degli eventi, e così' via).



Due andamenti possibili per un'infezione

C'è un'ultima considerazione da fare. Alla fine della fiera, l'obiettivo del modello di Kermack e McKendrick è studiare l'andamento della funzione *I(t)*, cioè la curva del numero di individui infettati.
Nella figura a fianco sono mostrati due diversi andamenti possibili per la funzione *I(t): c*iascuno di essi potrebbe rappresentare la soluzione del sistema di equazioni di Kermack e McKendrick in due diversi casi di infezione.
Chiaramente, l'andamento che presenta il picco corrisponde a un'epidemia in piena regola, molto preoccupante e potenzialmente devastante. Viceversa, l'altra curva, che non fa nemmeno in tempo a salire perché mostra fin dall'inizio una flessione indica un'infezione che passa inosservata perché si esaurisce subito. I modelli SIR ci permettono di distinguere tra queste diverse dinamiche.

Ma c'è una cosa che i modelli SIR non ci possono dire, ed è il numero di vittime che l'infezione può provocare. Se ci avete fatto caso, il modello di Kermack e McKendrick non fa differenza tra individui guariti, deceduti e messi in isolamento: ai fini dell'approccio SIR, in tutti questi casi si verifica una rimozione, nel senso che l'individuo in questione non è più infettivo, e questo basta e avanza per determinare l'andamento della funzione *I(t)*.

Malattia	**Tasso di letalità**
Morbillo	0,1 - 0,2%
Vaiolo	30%
Poliomielite	5-10%
Rosolia	3-6%
Parotite	0,01%
Difterite	5-10%
SARS-CoV	9-16%
MERS-CoV	30-40%
Pertosse	4%
Influenza stagionale	< 0,1%
COVID-19	2% (*)
Ebola	25-90%
(*) stime OMS, 3 febbraio 2020	

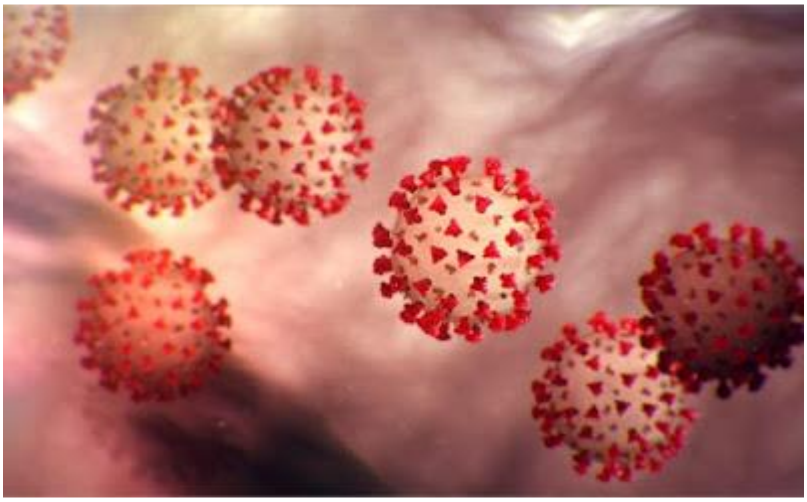
Se vogliamo prevedere il numero di decessi, occorre "smembrare" quel parametro γ corrispondente alla percentuale di infettivi che ogni giorno passano nella classe R. Il parametro γ, infatti, è la somma di tre diversi parametri associati ai tre diversi eventi di rimozione: guarigioni, certo, ma anche decessi e quarantene.
Lo specifico parametro legato ai decessi è noto come tasso di letalità dell'infezione: esso è quindi definito come il rapporto tra il numero dei decessi e il numero totale di individui infettivi. Nel corso di un'epidemia, questo indice può variare molto, perché possono modificarsi le condizioni al contorno che rendono la malattia più o meno mortale.
Nella tabella a fianco, possiamo vedere il tasso di letalità stimato per alcune malattie: per alcune è davvero altissimo (evidente il caso dell'Ebola), per altre ovviamente quasi trascurabile (si pensi all'influenza stagionale), mentre il tasso di letalità del nuovo Coronavirus è per adesso stimato attorno al 2%.

Termina qui il breve viaggio di Mr. Palomar nella matematica delle epidemie. Spero che possa giovare per restituire un po' di razionalità e serenità a questi nostri giorni di ansia. Soprattutto, la lezione incoraggiante che possiamo imparare dai modelli SIR è l'inevitabilità dello spegnersi dell'epidemia (ci si augura non ad alto prezzo di decessi): la curva degli infettivi, insomma, prima o poi deve per forza piegarsi verso il basso fino a smorzarsi del tutto.
Come ebbe a dire il grande scrittore portoghese José Saramago nel suo capolavoro *Cecità*:

Un commentatore televisivo ebbe l'ingegnosità di trovare la metafora giusta quando paragonò l'epidemia, o quel che fosse, a una freccia scagliata verso l'alto, che, nel raggiungere il culmine dell'ascensione, si mantiene per un momento come sospesa, e poi comincia a descrivere l'obbligatoria curva discendente che, a Dio piacendo, e con questa invocazione il commentatore ritornava alla trivialità degli scambi umani e all'epidemia propriamente detta, poi ci penserà la gravità ad accelerare fino alla scomparsa del terribile incubo che ci tormenta (...)

Coronavirus e crescita esponenziale

(3 marzo)



Quanto velocemente si sta propagando l'infezione da coronavirus?
Non essendo un virologo né un epidemiologo, posso soltanto affidarmi a quanto affermano gli esperti sulla base delle loro ricerche. In queste pagine cerco soltanto di proporre un po' di matematica e, anche in tema di epidemia, mostrare come i numeri ci possono aiutare a descrivere quanto sta accadendo attorno a noi.
Parlando appunto di velocità di propagazione del virus, un articolo reso noto pochi giorni fa (il 28 febbraio) da un team di ricercatori italiani dell'Università Statale di Milano (Alessia Lai, Annalisa Bergna, Carla Acciarri, Massimo Galli e Gianguglielmo Zehende), e accettato per la pubblicazione dal “Journal of Medical Virology”, ci fornisce alcune informazioni interessanti.
Innanzitutto, lo studio stima che l'epidemia abbia avuto origine tra la seconda metà di ottobre e la prima metà di novembre. Soltanto quando in Cina i ricoveri per polmonite hanno cominciato ad aumentare in maniera anomala si è compreso che ci si trovava di fronte a un nuovo e preoccupante virus. Per quanto riguarda l'Italia, l'infezione era probabilmente già presente prima di Natale (come ha scritto il direttore de "Le Scienze" Marco Cattaneo, "scordatevi la caccia all'untore, che il paziente zero ormai è come l'ago nel pagliaio").

Ricordate il famoso numero R_0, o tasso medio di riproduzione, di cui parlavo nel mio post sulla matematica delle epidemie (parti prima e seconda)? Ebbene, secondo i calcoli dei cinque scienziati il nuovo coronavirus mostra un R_0 globale uguale a circa 2,6 (il range possibile è compreso tra 2,1 e 5,1). In altre parole, ogni singola persona già contagiata dal virus infetta, in media, altre 2,6 persone, ipotizzando che tutta la popolazione sia esposta al contagio.

Come risulta chiaro se avete letto i miei post precedenti, con un un R_0 attestato su questi valori, decisamente maggiori di 1, il numero di individui infettivi non può che crescere in modo esponenziale, almeno finché il numero di guarigioni non comincia a diventare superiore al numero di contagi.

Questa deduzione è in linea con l'altra conclusione dello studio degli scienziati italiani: il tempo di raddoppio dell'epidemia è compreso fra 3,6 e 4,1 giorni.
Che cosa significa? In pratica, il numero di persone infettate raddoppia nel giro di quattro giorni circa. Immaginiamo, ovviamente semplificando un po' (e utilizzando dati non del tutto corrispondenti alla realtà), che il tempo di raddoppio sia diventato, il giorno di Capodanno, uguale a 4 giorni esatti, e che da allora non sia più cambiato. Supponiamo anche che il primo gennaio i contagiati fossero 10 in tutto il mondo. Possiamo dedurre che il 5 gennaio erano diventati all'incirca 20, il 9 gennaio 40, il 13 gennaio 80, e così via.
In generale, se si potesse viaggiare a ritroso nel tempo e approdare al giorno in cui vi era una persona infettata dal virus (il famigerato "paziente zero"), occorrerebbe contare poi il numero di giorni trascorsi da

quella data iniziale e dividerlo per 4. Il numero ottenuto è il numero di volte per cui dobbiamo raddoppiare l'1 originario, per calcolare il numero attuale di contagiati (questo vale però nell'ipotesi, per nulla realistica, in cui il tempo di raddoppio si sia mantenuto costante nel tempo: gli epidemiologi ci insegnano che in realtà esso varia abbastanza spesso, soprattutto nelle fasi iniziali del contagio).
Raddoppiare 1 per x volte significa elevare 2 alla x. Per esempio, raddoppiarlo 3 volte significa calcolare

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$$

La funzione in gioco, quindi, è del tipo

$$y = 2^x$$

e si tratta della ben nota funzione esponenziale. Qui la base è stata presa uguale a 2 perché siamo partiti dall'idea del raddoppio. Avremmo potuto parlare, anziché di raddoppio, di triplicazione, e avremmo ottenuto una funzione del tipo

$$y = 3^x$$

ma la sostanza del ragionamento non sarebbe per nulla cambiata, e la funzione sarebbe rimasta una funzione esponenziale, soltanto con base 3 anziché 2.
In generale, quando ci troviamo di fronte a un fenomeno che può essere descritto con una funzione esponenziale la cui base è maggiore di 1, abbiamo a che fare con qualcosa che cresce in modo accelerato, e che quindi tenderà a diventare molto grande se la legge con cui varia continuerà a essere di tipo esponenziale per molto tempo.

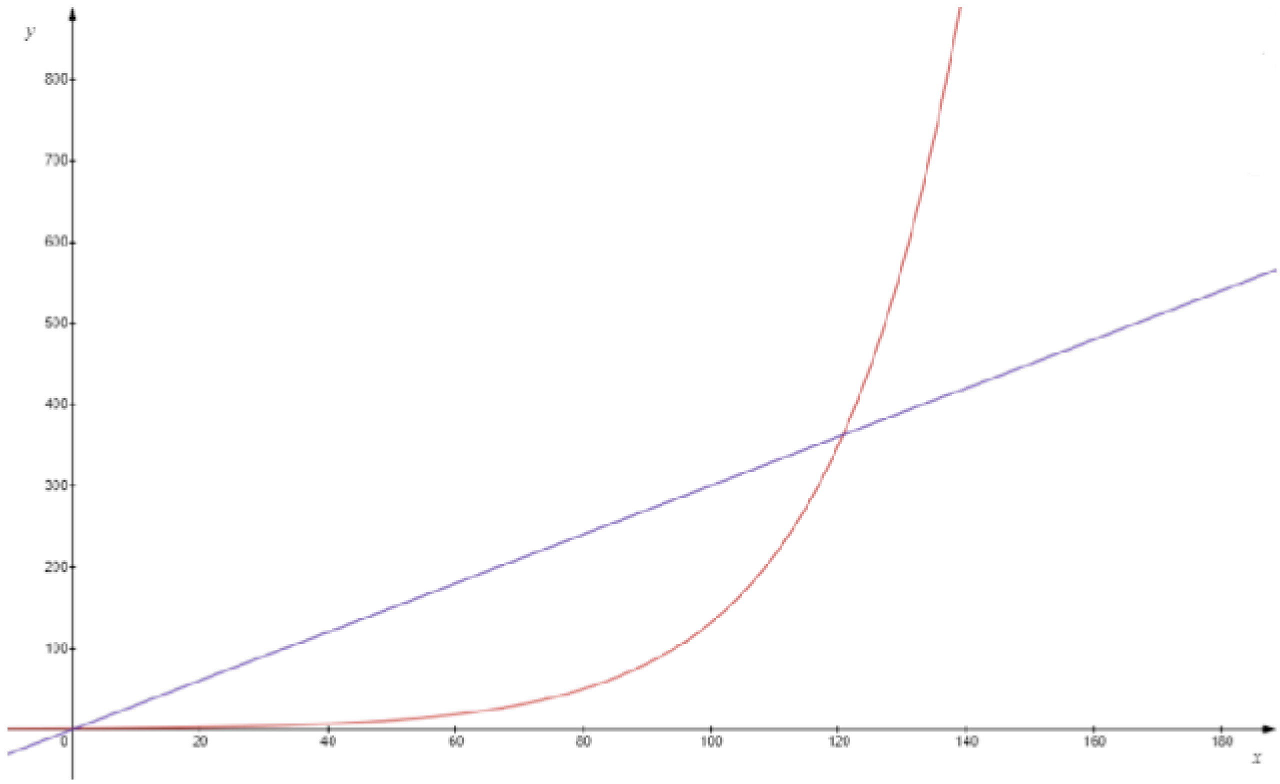
Ricordate la leggenda della scacchiera e dei chicchi di grano? La racconto sempre ai miei studenti quando parlo di funzioni esponenziali, o anche semplicemente quando in prima rinfresco loro la memoria sulle proprietà delle potenze. Secondo questa leggenda, l'inventore del gioco degli scacchi si presentò un giorno al palazzo del re per mostrargli la sua creazione. Il sovrano si appassionò tanto al nuovo gioco che si disse disposto a ricompensare l'inventore con qualunque cosa egli avesse desiderato. L'inventore disse che gli sarebbero bastati un chicco di grano sulla prima casella della scacchiera, due chicchi sulla seconda, quattro chicchi sulla terza, e così via, fino a raggiungere l'ultima casella. Dato che la scacchiera ha 64 caselle, il numero di chicchi sulla x-esima casella risulta uguale a

$$y = 2^x$$

e per calcolare il numero totale di chicchi è necessario sommare tutte le potenze di questo tipo, con *x* che varia da 0 (la prima casella, dove 2 elevato alla zero è uguale a 1) a 63 (l'ultima casella della scacchiera). Il risultato del calcolo è più o meno uguale a 18 miliardi di miliardi di chicchi di grano: decisamente troppi, anche per il reame più sconfinato che possiamo concepire.

La leggenda rende l'idea del rapidissimo aumento che una crescita di tipo esponenziale può comportare. Ma non dobbiamo cadere nell'equivoco che un incremento esponenziale debba per forza essere più rapido di un incremento di tipo lineare.
Lo ha spiegato anche, riferendosi proprio alla crescita degli infettati dal nuovo coronavirus, il prof. Pier Luigi Lopalco, noto epidemiologo dell'Università di Pisa, in una intervista rilasciata il primo marzo a RAI News. Secondo Lopalco, è possibile che anche in alcune zone dell'Italia sia iniziata la fase della diffusione esponenziale del contagio. Ma, come afferma l'epidemiologo, questo non deve necessariamente preoccuparci.
Crescita esponenziale, infatti, significa che il numero di infettati raddoppia in un numero costante di giorni, ma se questo numero è molto grande, la diffusione potrebbe non essere esplosiva da subito: se poi la fase esponenziale del contagio termina in un tempo breve, l'aumento complessivo potrebbe non essere così marcato (già, perché, come ho mostrato nei due post precedenti, la fase esponenziale prima o poi deve finire).

Nel diagramma qui sotto, vediamo il grafico di una funzione esponenziale (in rosso) messo a confronto con un grafico lineare, cioè con una retta (in blu). Immaginiamo che sull'asse orizzontale (cioè delle *x*) ci sia il tempo, misurato in giorni, e sull'asse verticale (*y*) il numero di contagiati in due epidemie diverse.



La base della funzione esponenziale è maggiore di 1 (altrimenti non ci sarebbe nemmeno una crescita), ma è appena maggiore di 1 (precisamente, vale 1,05). Questo significa che il tempo di raddoppio dei contagi è piuttosto lungo: per l'esattezza, è uguale a più di 14 giorni. Esponenziale sì, quindi, ma moderata.
La retta, invece, ha un coefficiente angolare pari a 3, il che significa che gli infettati aumentano di 3 ogni

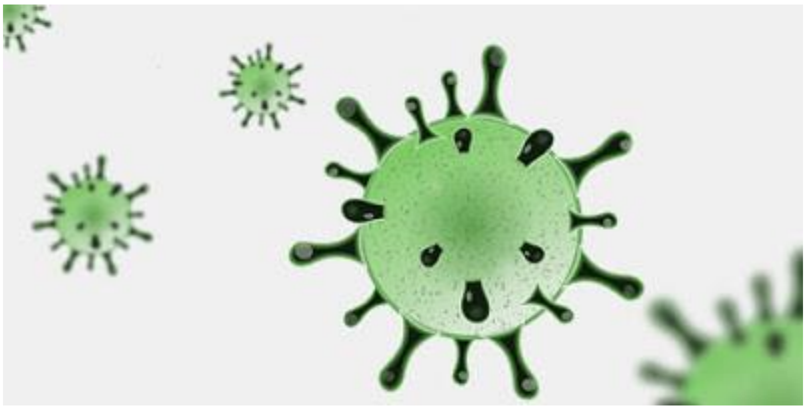
giorno. Non è una crescita esponenziale, certo, ma è una progressione che inizialmente risulta più rapida dell'altra, che diviene esplosiva tardi.
Come si vede subito dal diagramma, non c'è storia: la curva blu si impenna in modo da distanziare decisamente la curva rossa: se le epidemie terminano in tempi brevi, diciamo non molto oltre i 120 giorni, quella ad aumento lineare avrà fatto danni ben maggiori di quella a diffusione esponenziale. Tutto dipende dall'orizzonte temporale: alla lunga, l'esponenziale vince sempre sulle rette, ma se la base è di poco superiore a 1, potrebbe servire molto, troppo tempo per il sorpasso.

Questo ragionamento rende evidente una verità che spesso sfugge a molte persone: parlare di crescita esponenziale non significa parlare genericamente di crescita rapida. Questo sia perché, come ho appena mostrato, un aumento esponenziale potrebbe essere tutt'altro che rapido, sia perché, al contrario, una grandezza può crescere rapidamente ma senza che il fenomeno sia di tipo esponenziale. Purtroppo molto spesso, nei titoli dei giornali, nelle trasmissioni televisive e nei social network, si sente usare l'espressione "crescita esponenziale" in modo improprio, intendendo appunto un aumento genericamente molto veloce. Tanto per fare uno dei moltissimi possibili esempi, date un'occhiata a questo articolo apparso nel maggio del 2019: si parla nel titolo di "crescita esponenziale del mercato dei green bond", ma nel pezzo si ammette che c'è stato soltanto un aumento del 42% tra il primo trimestre del 2018 e il primo trimestre del 2019. Decisamente poco per poter definire la crescita "esponenziale"!
Insomma, questo è un esempio di come un termine matematico dal significato molto ben delimitato si è esteso al linguaggio comune perdendo la sua accezione precisa. Ma anche a questo, strano a dirsi, serve la matematica: a usare le parole in modo più appropriato.

In conclusione, riportando le nostre considerazioni al caso del nuovo coronavirus: è molto probabile che in Italia il contagio sia all'inizio della fase esponenziale crescente, ma ciò non deve essere motivo di ansia e pessimismo. Il tasso di riproduzione R_0 è stato stimato a livello globale, come ho detto all'inizio di questo post, attorno a 2,6: ma nel nostro Paese potrebbe anche avere un valore più basso, rendendo la curva esponenziale più prudente nelle sue fasi iniziali. Se poi l'epidemia dovesse raggiungere il picco, e quindi cominciare a diminuire, in tempi relativamente brevi, tutto tornerebbe alla normalità senza che siano stati rilevati danni particolarmente importanti. Vedremo nei prossimi giorni come evolverà la situazione.

Il coronavirus per fare matematica a scuola

(19 aprile)



In questo periodo di lockdown si è assistito a un fenomeno straordinario: alcuni argomenti matematici piuttosto tecnici, solitamente confinati nelle pagine degli articoli specialistici o dei testi scolastici o universitari di matematica, sono diventati oggetto di discussione anche tra i "non addetti ai lavori", nei talk show televisivi, nei social e sulle testate d'informazione.
Questo fatto è allo stesso tempo positivo e negativo.
Positivo, perché ha mostrato a un pubblico molto vasto che la matematica è uno strumento decisivo per il monitoraggio e per la gestione di una situazione d'emergenza come quella che stiamo vivendo: ciò ha contribuito a togliere alla matematica quell'aura di disciplina astrusa e priva di applicazioni pratiche.
Negativo, perché esiste il rischio che questioni molto complesse e delicate vengano banalizzate e trattate con superficialità.

Per quanto mi riguarda, come divulgatore e ancor più come docente, mi sono accorto di alcuni fatti molto interessanti. Per prima cosa, gli argomenti matematici che in queste settimane sono stati toccati nel dibattito pubblico relativo alla pandemia di COVID-19, sono molto variegati, spaziando dalle funzioni esponenziali alle equazioni differenziali, dalle percentuali alla statistica, e così via.
Di più: ho constatato che praticamente (quasi) tutti gli argomenti di matematica che di solito vengono trattati nel corso della programmazione della scuola secondaria di primo e secondo grado (scuola media e superiore, per intenderci) potrebbero essere trattati ed esemplificati attingendo ai problemi e alle questioni che il virus ci sta ponendo.

Ho allora pensato di scrivere questo post per elencare gli argomenti in questione, dando per ciascuno un accenno di come i concetti matematici possano essere affrontati con riferimento alla pandemia.
Sia chiaro: il mio esercizio è poco più di un gioco elencativo, e non ha alcuna pretesa di essere uno studio accurato, esaustivo e dettagliato: l'intento è semplicemente suggerire, soprattutto ai colleghi, qualche spunto frettoloso, consapevole di dire cose che in gran parte sono già ben note e in molti casi anche messe in pratica.
Sì, perché sicuramente moltissimi docenti stanno impiegando questo periodo di didattica a distanza per portare avanti gli argomenti in un'ottica diversa dal solito, mostrando esempi e applicazioni legati all'ambito dell'epidemia.
L'occasione, secondo me, è assolutamente ghiotta: la matematica è salita alla ribalta delle cronache come forse non era mai successo prima, e sfruttare questo momento di popolarità è utile per veicolare gli argomenti verso gli studenti in modo molto più efficace.
Ecco allora il mio elenco (non badate troppo all'ordine che ho seguito, non necessariamente coincidente con quello/i adottato/i nelle scuole).

Numeri naturali e numeri interi
Usiamo i numeri naturali soprattutto per contare, ovviamente. Relativamente a una certa zona (l'Italia, per esempio), potremmo contare i nuovi casi di malati di COVID-19 in un certo giorno. Sommando questi numeri naturali per i diversi giorni di una settimana, o di un mese, otteniamo i nuovi casi in un periodo più lungo. Se poi consideriamo la differenza tra nuovi contagi e guarigioni nello stesso periodo, potremmo imbatterci (evenienza molto desiderabile) in numeri negativi. Variazioni sul tema possono portare a espressioni con numeri interi, anche con parentesi.

Frazioni e numeri razionali
Se dividiamo il numero di nuovi contagi per il totale della popolazione (sempre riferendoci a un certo periodo e a una certa area), otteniamo un numero che è più significativo del numero assoluto di casi. Questo numero sarà, in generale, una frazione, ovvero un numero razionale. Per esempio potremmo scoprire che un millesimo dell'intera popolazione si è infettata nell'intervallo di tempo considerato.
Altri esempi di frazioni che intervengono nel mondo delle epidemie sono il tasso di letalità, ovvero il numero di decessi fratto il numero di malati, oppure il tasso di mortalità, cioè il numero di decessi fratto la quantità totale della popolazione (sempre in un dato periodo).

Percentuali
Le percentuali saltano fuori molto facilmente quando si parla di COVID-19 o di epidemie in genere. Per esempio, moltiplicando per 100 le frazioni introdotte sopra otteniamo le corrispondenti percentuali. Ma si può ragionare anche su altre porzioni della popolazione (per esempio, rispetto al totale dei malati, si possono considerare le percentuali di quelli che mostrano sintomi lievi, medi o gravi, oppure dei ricoverati, degli isolati in casa, ecc.)

Proporzioni
Possiamo usare le proporzioni come strumenti utili per trasformare una frazione in un'altra frazione avente un denominatore diverso: nel caso in cui quest'ultimo debba essere 100 stiamo operando la trasformazione della frazione nel relativo valore percentuale.

Potenze
Si possono tirare in ballo facilmente anche le potenze ipotizzando scenari in cui ogni contagiato infetta un numero fisso di altre persone in un dato intervallo di tempo. Naturalmente sto parlando di una situazione di crescita esponenziale, ma anche senza descrivere la questione utilizzando il concetto di funzione si può restare nell'ambito più elementare delle potenze (magari ricorrendo anche a narrazioni metaforiche come quella classica della scacchiera e dei chicchi di grano).

Equazioni e disequazioni
Non è difficile, attingendo alle relazioni descritte fin qui, creare problemi che possano essere risolti mediante semplici equazioni, lineari o non lineari, intere o fratte.
Naturalmente si tratta di esercizi puramente didattici, visto che i modelli "seri" utilizzati per descrivere le dinamiche di un'epidemia ricorrono a equazioni differenziali (ne accennerò più avanti).

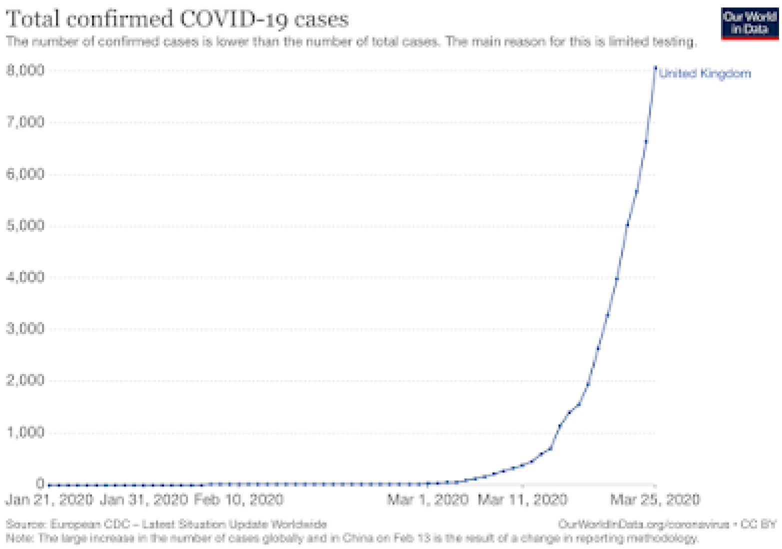
Regione	AGGIORNAMENTO 04/04/2020 ORE 17.00							
	POSITIVI AL nCoV				DIMESSI/ GUARITI	DECEDUTI	CASI TOTALI	TAMPONI
	Ricoverati con sintomi	Terapia intensiva	Isolamento domiciliare	Totale attualmente positivi				
Lombardia	12.002	1.326	13.892	27.220	13.242	8.656	49.118	141.877
Emilia Romagna	1859	358	8306	12.523	2.040	1.977	16.540	67.075
Piemonte	3.441	450	5.802	9.693	888	1.128	11.709	37.181
Veneto	1691	324	7078	9.093	1.124	607	10.824	133.289
Toscana	1129	286	3639	5.054	310	307	5.671	47.886
Marche	997	153	2347	3.497	270	574	4.341	14.472
Liguria	1121	169	1604	2.894	767	542	4.203	14.087
Lazio	1236	193	1677	3.106	439	212	3.757	44.624
Campania	567	114	1815	2.496	146	186	2.828	21.534
Trento	353	81	1.319	1.753	257	210	2.220	9.863
Puglia	627	153	1193	1.973	94	173	2.240	18.977
Friuli V.G.	183	50	1.103	1.336	505	145	1.986	21.126
Sicilia	553	74	1.099	1.726	95	111	1.932	19.896
Abruzzo	354	71	931	1.356	118	154	1.628	12.837
Bolzano	291	61	849	1.201	245	146	1.592	15.045
Umbria	167	44	716	927	242	41	1.210	11.809
Sardegna	123	24	642	789	44	41	874	6.789
Calabria	178	15	469	662	80	49	741	12.314
Valle d'Aosta	63	23	474	560	106	82	748	2.274
Basilicata	44	19	181	244	9	11	264	2.765
Molise	31	6	134	171	24	11	206	1.504
TOTALE	29.010	3.994	55.270	88.274	20.996	15.362	124.632	657.224

ATTUALMENTE POSITIVI	88.274
TOTALE GUARITI	20.996
TOTALE DECEDUTI	15.362
CASI TOTALI	124.632

Statistica
Questa è evidentemente un'area assolutamente centrale nel nostro discorso. Abbiamo visto quanto sia importante poter disporre di dati di qualità e saperli usare correttamente per comprendere la situazione dell'epidemia e cercare di prevederne l'evoluzione futura. Le tabelle che ogni giorno vengono rese pubbliche per aggiornarci sul conteggio degli individui positivi, dei ricoverati, dei guariti, dei deceduti e così via, suddivise per regione o per provincia sono ottimi esempi per comprendere i concetti basilari della statistica descrittiva: popolazioni, unità statistiche, rilevazioni, caratteri e modalità, frequenze (assolute, relative e percentuali), seriazioni e serie statistiche, ecc.
Sono innumerevoli le attività e gli approfondimenti che si possono svolgere a partire da tabelle di questo tipo: per esempio esplorare le varie tipologie di rappresentazione grafica dei dati (istogrammi, aerogrammi, ortogrammi, cartogrammi con riferimento alle regioni o alle province italiane, ecc.), calcolare indici di posizione centrale (medie, moda, mediana) e di variabilità.

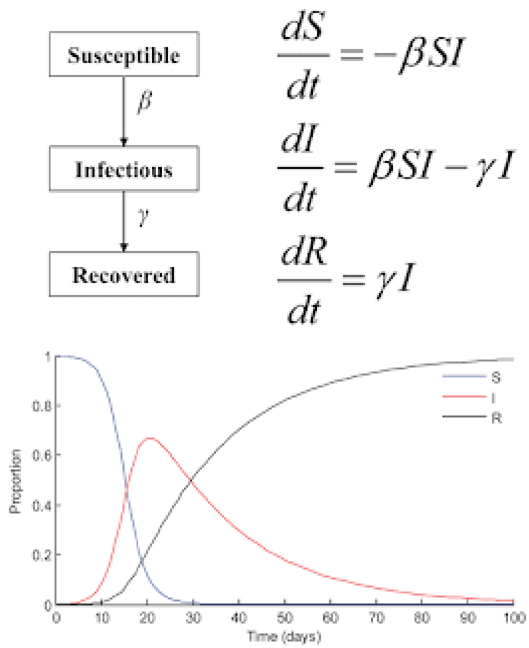
Calcolo combinatorio
Nella seconda parte del mio post di febbraio sulla matematica delle epidemie mostravo come il calcolo combinatorio possa essere utile per conteggiare il numero di diverse coppie di individui che si possono creare in una popolazione: calcolo che può essere utile per fondare la formulazione di modelli descrittivi dell'epidemia.
Certamente questo ramo della matematica può essere chiamato in causa anche in altri modi, per esempio in quanti modi è possibile segmentare una classe in gruppi più piccoli (questione che potrebbe diventare importante nei prossimi mesi).

Probabilità
In quest'area della matematica, il calcolo che viene in mente per primo è quello relativo alla probabilità che una persona presa a caso venga contagiata dal virus.
Nello stesso post che ho citato sopra viene descritto un possibile calcolo di questo genere, che parte da considerazioni combinatorie e rappresenta la base della formulazione dei modelli matematici come quello di Kermack-McKendrick.



Funzioni e grafici
Siamo sommersi, ormai da molte settimane, da grafici che illustrano l'andamento nel tempo del numero di contagiati (e anche di guariti e di deceduti), relativamente a una singola regione o provincia, o a tutta l'Italia, o a un altro Paese, o a tutto il mondo.
La competenza relativa alla lettura e alla decifrazione di un grafico di questo tipo è assolutamente fondamentale per uno studente, ancor di più della capacità di studiare una funzione assegnata in forma analitica e rappresentarla graficamente.
L'analisi di alcuni grafici selezionati da articoli di questo periodo e relativi allo sviluppo della pandemia potrebbe rappresentare un'attività molto interessante: ovviamente dovrebbe essere svolta in un modo coerente con il grado di conoscenza degli studenti (per esempio distinguere una funzione lineare da una non lineare, oppure individuare gli intervalli in cui una funzione è crescente, o ancora studiare il segno, determinare le intersezioni con gli assi, fino ad arrivare agli asintoti, ai punti di massimo e minimo, e così via).

Rette, funzioni esponenziali e altro
Nel caso delle funzioni che descrivono l'andamento del contagio, sarebbe particolarmente interessante riconoscere alcuni andamenti speciali, soprattutto quello di tipo lineare e quello di tipo esponenziale (si veda anche il mio post sul tema).
Si è parlato molto, specialmente nelle settimane scorse, di crescita esponenziale, di curva logistica, di flesso: ecco, quale migliore occasione per consolidare questi concetti?



Limiti di funzioni
Sempre in relazione alle funzioni e ai grafici, il limite è uno di quei concetti che crea maggiori difficoltà di comprensione. L'esemplificazione del virus potrebbe aiutare in questo senso: per esempio, considerando la funzione che descrive la variazione nel tempo del numero di contagiati, non dovrebbe essere difficile capire che il limite per t che tende a più infinito corrisponde a quanti contagiati ci saranno a lungo andare.

Derivate ed equazioni differenziali
Utilizzando come funzioni gli andamenti temporali del numero di contagiati, ma anche quelli del numero di suscettibili e di rimossi (guariti + deceduti+isolati, secondo il modello di Kermack-McKendrick), le derivate diventano importanti perché rappresentano il tasso di variazione di queste grandezze, e come tali intervengono nelle equazioni differenziali

Geometria
Anche la geometria potrebbe essere chiamata in causa, per esempio nel proporre problemi relativi a questioni di distanziamento sociale tra persone. Il livello di difficoltà potrebbe variare molto, a seconda di come viene formulato il problema.

E qui mi fermo. Ma si potrebbe certo continuare, e soprattutto dettagliare molto di più di quanto ho fatto (ammesso che abbia senso farlo).
Certo, qualcuno potrà pensare: "anche prendendo un qualsiasi altro ambito reale diverso dal Coronavirus si poteva fare un esercizio del genere".
Può essere. Un altro ambito che, a mio parere, può offrire una varietà di spunti uguale e probabilmente superiore rispetto al COVID-19 e alle epidemie è rappresentato dalla questione climatica: qui gli agganci matematici utili a livello didattico sono davvero numerosissimi (esistono molti siti che sfruttano questa possibilità: tra tutti segnalo "Maths for Planet Earth - Climate Based Maths Questions for Students and Teachers", realizzato da un team dell'università di Oxford)
Ho però qualche dubbio che qualsiasi altro ambito reale possa offrire le stesse opportunità: se non altro, l'idea di partire proprio dal Coronavirus per parlare di matematica può essere vincente proprio perché, come dicevo all'inizio del post, questa tematica sta attraendo l'interesse di tutti e una lezione ancorata su tale ambito potrebbe motivare maggiormente gli studenti.

Chiudo con una riflessione. L'elenco di collegamenti che ho frettolosamente tracciato potrebbe interessare particolarmente i docenti delle classi quinte delle scuole superiori: nelle prossime settimane, infatti, potrebbe aver senso, anche in vista degli esami di Stato, fare un rapido percorso di ripasso dei "vecchi"

argomenti utilizzando spunti come quelli che ho elencato.
In una prospettiva del genere, l'omogeneità dell'ambito reale dovrebbe aiutare i ragazzi a metabolizzare meglio i concetti matematici e a comprendere come un medesimo settore applicativo possa essere descritto e modellizzato ricorrendo a strumenti quantitativi diversi, a seconda dell'obiettivo che ci si pone o del problema reale che si deve risolvere.

Ristoranti, virus e geometria

(13 maggio)

Nella seduta del 10 maggio del Comitato tecnico scientifico per l'emergenza COVID-19, è stato approvato un breve documento tecnico redatto dall'INAIL in collaborazione con l'Istituto Superiore di Sanità. In questo report vengono proposte alcune misure di sicurezza che potrebbero essere adottate nel settore della ristorazione per garantire il contenimento della diffusione del virus.
Leggendo il documento, emergono in particolare due frasi che impongono altrettante norme di distanziamento.
La prima:
Il layout dei locali di ristorazione andrebbe quindi rivisto con una rimodulazione dei tavoli e dei posti a sedere, garantendo il distanziamento fra i tavoli – anche in considerazione dello spazio di movimento del personale – non inferiore a 2 metri e garantendo comunque tra i clienti durante il pasto (che necessariamente avviene senza mascherina), una distanza in grado di evitare la trasmissione di droplets e per contatto tra persone, anche inclusa la trasmissione indiretta tramite stoviglie, posaterie, ecc.; anche mediante specifiche misure di contenimento e mitigazione.

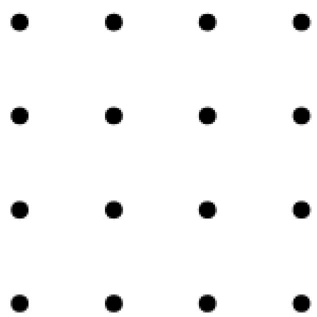
E la seconda:
In ogni caso, va definito un limite massimo di capienza predeterminato, prevedendo uno spazio che di norma dovrebbe essere non inferiore a 4 metri quadrati per ciascun cliente, fatto salvo la possibilità di adozioni di misure organizzative come, ad esempio, le barriere divisorie.

Estraendo l'essenza geometrica di queste frasi, le norme possono essere così riformulate:
1) la distanza tra un un tavolo e l'altro deve essere non minore di 2 metri;
2) la capienza massima di una sala deve essere calcolata considerando un'area di almeno 4 metri quadrati esclusiva per ciascun cliente.

Benissimo. Sulla rete e sulle testate giornalistiche sono subito apparse interpretazioni improbabili o imbarazzanti di queste norme, come ad esempio l'immagine riportata qui a destra e pubblicata, pare, su quotidiani come il Gazzettino e il Messaggero.

Già, perché tutti sanno che un quadrato con il lato di 4 metri ha un'area di 4 metri quadrati, o no?
No, ovviamente: ha un'area di 16 metri quadrati.
Evidentemente il distratto (o molto scarso in matematica?) grafico voleva scrivere "2 metri", e non "4 metri", come lato del quadrato contornato di arancione. In questo modo l'area è effettivamente di 4 metri quadrati, e la distanza tra un cliente e l'altro è di 2 metri, come richiesto dalle norme.

Ma c'è un problema. Gianluca Dotti l'ha spiegato molto bene in un suo articolo pubblicato oggi su Wired. Non dobbiamo pensare, come erroneamente ha fatto qualcuno in questi giorni, che le due norme siano l'una equivalente all'altra.



Reticolo ortorombico (o rettangolare)

Sì, è vero che possiamo immaginare una griglia regolare come quella riportata nella figura qui a sinistra, nella quale ogni punto corrisponde a un cliente e la distanza tra uno e l'altro è di 2 metri. Così facendo ogni cliente si ritrova "proprietario" di un quadrato di area uguale a 4 metri quadrati.
Il fatto è che la norma parla di tavoli e non di clienti quando enuncia la norma della distanza di 2 metri. E

a ogni tavolo, normalmente, stanno più persone, mica soltanto una.

Non basta: quella griglia, che in geometria e in cristallografia (riducendoci a due dimensioni, ovviamente) sarebbe definita reticolo ortorombico (o rettangolare), nella realtà della ristorazione è un'astrazione piuttosto inverosimile: solitamente i tavoli di un ristorante o i tavolini di un bar non sono disposti così, ma secondo strutture meno ordinate.

Fonte: TGCOM24

Presupponendo che la distanza minima tra due persone sedute allo stesso tavolo sia quella, standard in questi tempi di Coronavirus, di un metro, lo schema qui a destra risulta molto più rigoroso e corretto.

Mettiamoci nei panni di un ristoratore.
Il suo problema sarà rispettare le due norme cercando nel contempo di massimizzare il numero di clienti nella sua sala.
Come segnalato anche nell'articolo di Dotti, la soluzione ottimale non è il reticolo ortorombico, ma quello che i cristallografi e i matematici chiamano reticolo esagonale (in 2D). Le api, per così dire, lo sanno bene, e non a caso costruiscono i loro favi utilizzando una struttura esagonale, che permette loro di ottenere il massimo risparmio di cera.
In questo tipo di griglia, mostrato nell'immagine sotto, ogni cliente è al centro di un esagono i cui vertici sono i clienti più vicini.
Ma poi, lo ricordo ancora, la questione è complicata dal fatto che la distanza di 2 metri vale tra tavoli diversi, non tra clienti che stanno allo stesso tavolo.

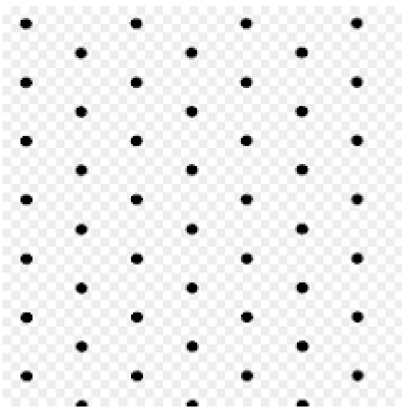


Figura 1 - Reticolo esagonale

E comunque, l'altra norma, quella dei 4 metri quadrati, serve unicamente come criterio per determinare la capienza massima della sala, e non deve essere presa alla lettera come spazio minimo che deve essere garantito a ogni singolo cliente.

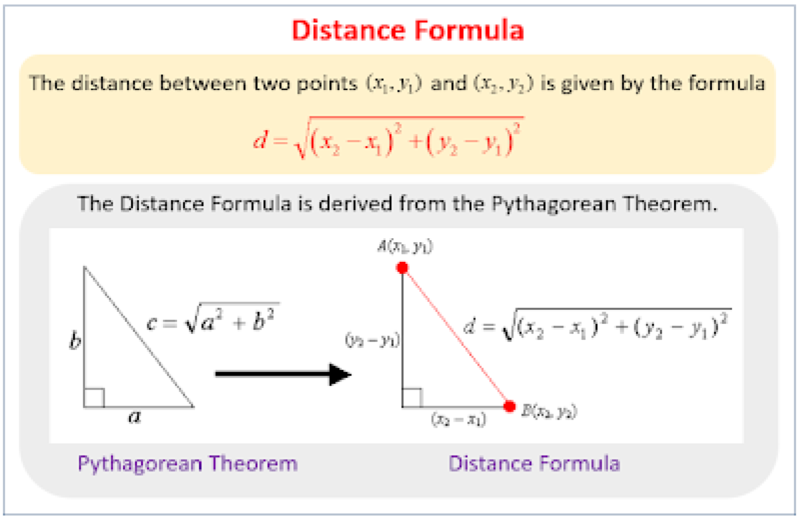
In ogni caso, come avevo preannunciato in un post di quasi un mese fa, era inevitabile che dopo le percentuali, la statistica, la probabilità, le funzioni esponenziali e le equazioni differenziali, anche la geometria salisse alla ribalta come strumento necessario per orientarci nel groviglio in cui siamo finiti per colpa del virus.
E poi dicono che la matematica non serve a niente.

Distanziamento sociale e distanza matematica

(24 giugno)

Alzi la mano chi aveva già sentito l'espressione *distanziamento sociale* (o *distanziamento fisico*) prima dell'introduzione del lockdown. Pochi di noi, credo, se si eccettuano forse le persone coinvolte nel settore sanitario. E con ogni probabilità la versione nota era quella inglese, ovvero *social distancing* (o *physical distancing*).
Ora, a lockdown concluso, è invece un'espressione sulla bocca di tutti. Con questa dicitura, è ben noto, si intende l'accorgimento di mantenere una certa distanza tra le persone e di ridurre il numero di persone contemporaneamente presenti in un certo luogo, allo scopo di evitare o ridurre la diffusione di un agente infettivo, per esempio un virus nel corso di una pandemia.
L'utilizzo di questa misura di sicurezza è antichissimo: se ne parla anche nella Bibbia, in relazione all'isolamento di lebbrosi o appestati.

Se si parla di distanziamento sociale, si parla essenzialmente di distanza tra una persona e l'altra. E, come è facile immaginare, si tratta innanzitutto di un concetto matematico.
Immaginiamo che in una stanza ci siano due persone, Andrea e Beatrice, che parlano tra di loro. Come possiamo misurare la distanza che le separa? Presto detto: prendiamo un metro, magari di quelli da sarto, lo stendiamo per terra in modo da creare un segmento che parte da Andrea e arriva a Beatrice, e leggiamo sul metro il numero di centimetri corrispondenti al punto in cui si trova Beatrice.



Se formalizziamo il procedimento in modo più astratto, ci riportiamo a quanto abbiamo imparato a scuola: se sul piano cartesiano abbiamo due punti A e B, ciascuno contraddistinto da una coppia di coordinate, la distanza tra A e B è la lunghezza del segmento che congiunge i due punti. Nel caso più generale, questa lunghezza può essere facilmente calcolata a partire dalle coordinate dei punti ricorrendo al teorema di Pitagora, come è illustrato nella figura a fianco.

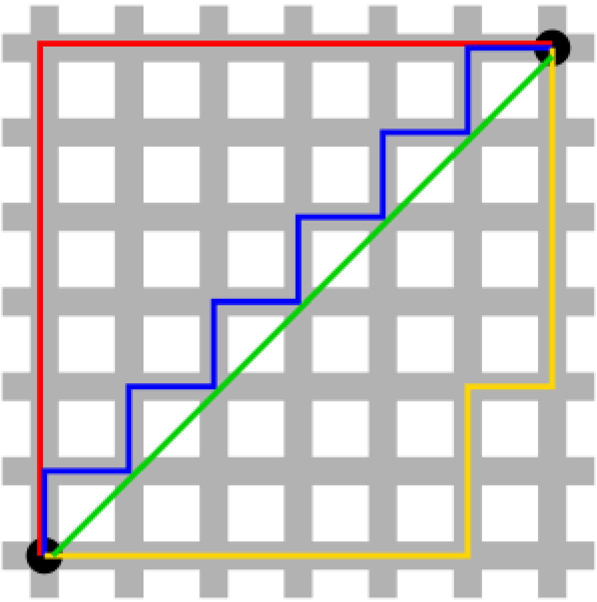
Ma il concetto di distanza, in matematica, è molto più generale. Rappresenta, per così dire, un'astrazione della nozione di lontananza che sussiste tra due oggetti qualsiasi.
La definizione che solitamente viene data è la seguente: la distanza su un qualsiasi insieme M è una funzione *d* che mappa il prodotto cartesiano M × M sull'insieme dei numeri reali e che soddisfa le seguenti tre proprietà:

$$
\begin{aligned}
&1)\quad x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0\\
&2)\quad d(x,y) = d(y,x)\\
&3)\quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)
\end{aligned}
$$

La prima proprietà formalizza il fatto che l'unico caso in cui due oggetti abbiano distanza reciproca nulla è che i due oggetti siano in realtà lo stesso oggetto.
La seconda proprietà è la simmetria: la distanza tra *x* e *y* è uguale alla distanza tra *y* e *x*.
Infine, la terza è la cosiddetta proprietà triangolare: la distanza tra due elementi *x* e *y* non può essere maggiore della somma tra la distanza tra *x* e un terzo punto *z* e la distanza tra questo terzo punto *z* e *y*.
Considerate un triangolo: la lunghezza di qualsiasi suo lato è sicuramente minore o uguale della somma delle lunghezze degli altri due. Detto altrimenti: se io devo andare da Milano a Torino, ci impiego meno se prendo una strada diretta anziché fare una tappa intermedia a Genova.

Da queste tre proprietà (anzi, dalle ultime due) se ne può dedurre una quarta, molto semplice, che stabilisce che la distanza tra due elementi dell'insieme M può essere un numero positivo oppure uguale a zero, ma non può essere un numero negativo (avete mai visto un segmento di lunghezza negativa?)

Una funzione *d* che soddisfa tutte e tre le proprietà fondamentali può essere legittimamente chiamata *distanza*. Ma il bello è che, preso un insieme qualsiasi, non esiste necessariamente una sola funzione con queste caratteristiche.
Se per esempio l'insieme M è l'insieme dei punti del piano, la distanza che abbiamo imparato a calcolare mediante il teorema di Pitagora (e che viene chiamata distanza euclidea) è la più semplice e intuitiva, ma non è certo l'unica che soddisfa le tre proprietà.



Ne esistono molte altre, per esempio la distanza di Manhattan, introdotta da Hermann Minkowski, secondo la quale la distanza tra due punti del piano cartesiano è la somma del valore assoluto delle differenze delle loro coordinate. In altre parole, per misurare quanto dista un punto da un altro, non posso tracciare una linea obliqua che congiunga direttamente i due punti, ma sono autorizzato a utilizzare soltanto linee orizzontali e verticali.
Guardate la figura a fianco. Per congiungere i due punti indicati come pallini neri, si possono scegliere diversi percorsi formati da segmenti orizzontali e verticali: la figura ne mostra tre (in rosso, blu e giallo), ma ce ne sono molti altri. Tutti, comunque, hanno la stessa lunghezza complessiva (12). Misurare la distanza lungo la linea verde, obliqua e diretta, è invece proibito.

In sostanza, mentre nella geometria euclidea dobbiamo calcolare le differenze tra le coordinate, e poi calcolare la radice quadrata della somma dei quadrati di tali differenze, a Manhattan è più facile: basta sommare direttamente le differenze.
Il sistema basato sulla distanza di Manhattan viene anche detto "geometria del taxi", ed è particolarmente realistico in città dove le principali strade sono perpendicolari tra di loro (per esempio Manhattan, appunto, ma anche Torino). Talvolta questa metrica viene definita anche "geometria degli scacchi", perché è secondo questo sistema che la torre misura la distanza tra due caselle della scacchiera.

Attenzione, nel definire il concetto di distanza ho parlato di insieme M qualsiasi, non necessariamente di un insieme di punti nel piano o nello spazio. Potrebbe trattarsi di un insieme di note musicali (la distanza potrebbe essere allora la formalizzazione del concetto di intervallo musicale), di immagini (allora potremmo entrare in considerazioni computazionali relative alla somiglianza tra immagini, rilevanti nell'ambito dei software di riconoscimento di oggetti), e perfino di parole.
In quest'ultimo caso, si può usare per esempio la *distanza di Hamming*: date due parole, la loro distanza di Hamming è il numero di sostituzioni (un enigmista direbbe "cambi di lettera") che devono essere eseguite per trasformare una parola nell'altra. Ne avevo parlato in un post della serie dei premi Turing, perché l'inventore di questa importante funzione distanza tra stringhe di caratteri, il matematico americano Richard Hamming, fu insignito del prestigioso riconoscimento nel 1968.

In generale, una volta che abbiamo definito una funzione distanza su un insieme M, possiamo anche definire il concetto matematico di *palla*: la palla di raggio *r* centrata in un certo elemento *z* di M non è altro che l'insieme degli elementi di M la cui distanza da *z* è minore di *r* (per la precisione, questa è una palla aperta, mentre per definire la corrispondente palla chiusa dobbiamo scrivere "minore o uguale" al posto di "minore").
Come si vede nella figura a fianco, la palla è il concetto matematico perfetto per rappresentare l'idea del distanziamento sociale!